3 Funzioni, limiti e continuità

1 Richiami di teoria

1.1 Intervalli

Tra i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, insieme dei numeri reali, sono particolarmente importanti i cosiddetti **intervalli limitati** e **intervalli illimitati**.
Dati due numeri reali a e b, con $a < b$, si distinguono i seguenti intervalli limitati:

- l'**intervallo aperto**, cioè l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che $a < x < b$, che si indica con $]a; b[$ o con $(a; b)$;
- l'**intervallo chiuso**, cioè l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che $a \leq x \leq b$, che si indica con $[a; b]$;
- l'**intervallo aperto a sinistra**, cioè l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che $a < x \leq b$, che si indica con $]a; b]$ o con $(a; b]$;
- l'**intervallo aperto a destra**, cioè l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che $a \leq x < b$, che si indica con $[a; b[$ o con $[a; b)$.

I numeri a e b si dicono, rispettivamente, **estremo inferiore** ed **estremo superiore**; il numero $b - a$ è l'**ampiezza** (o **lunghezza**) dell'intervallo, mentre i numeri $\dfrac{b-a}{2}$ e $\dfrac{a+b}{2}$ vengono detti, rispettivamente, **raggio** e **centro** dell'intervallo.

Intorni di un punto

Si chiama **intorno completo** di un numero reale (o di un punto) x_0 un qualsiasi intervallo aperto contenente x_0 e lo si indica con $I(x_0) = (x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2)$, $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$.
In particolare, gli intervalli aperti di centro x_0 sono detti **intorni circolari** di x_0.

Se consideriamo $\delta \in \mathbb{R}^+$ come raggio dell'intorno circolare, allora tale intorno si indica con $I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, e risulta essere l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che $|x - x_0| < \delta$.

Se a è un numero reale qualsiasi, si chiamano **intervalli illimitati** gli insiemi:

- **intervallo chiuso illimitato superiormente e di estremo inferiore** a, cioè l'insieme $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$, che si indica con $[a; +\infty[$ o con $[a; +\infty)$;
- **intervallo aperto illimitato superiormente e di estremo inferiore** a, cioè l'insieme $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}$, che si indica con $]a; +\infty[$ o con $(a; +\infty)$;
- **intervallo chiuso illimitato inferiormente e di estremo superiore** a, cioè l'insieme $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$, che si indica con $]-\infty; a]$ o con $(-\infty; a]$;
- **intervallo aperto illimitato inferiormente e di estremo superiore** a, cioè l'insieme $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$, che si indica con $]-\infty; a[$ o con $(-\infty; a)$.

L'insieme $\mathbb{R}$ si indica anche con il simbolo $]-\infty; +\infty[$ oppure $(-\infty; +\infty)$.

Siano E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.

Il **punto** x_0 si dice **di accumulazione** di E quando in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di E (un punto di accumulazione di un insieme può appartenere o no all'insieme stesso).

Un punto x_0 appartenente a un insieme E che non sia di accumulazione per E, si chiama **punto isolato** di E (in tal caso esiste un intorno di x_0 che non contiene punti di E distinti da x_0).

1.2 Estremanti di un insieme

Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Si dice che l'insieme E è **limitato superiormente** quando esiste un numero b non minore di tutti i numeri di E, cioè quando $\forall x \in E\colon x \leq b$. Il numero b è detto **maggiorante** di E.

Se, qualunque sia b, esistono sempre in E numeri maggiori di b, si dice che l'insieme E è **illimitato superiormente**. In altre parole: un insieme illimitato superiormente è privo di maggioranti.

Si dice che l'insieme E è **limitato inferiormente** quando esiste un numero a non maggiore di tutti i numeri di E, cioè quando $\forall x \in E$: $x \geq a$. Il numero a è detto **minorante** di E.

Se l'insieme E è privo di minoranti, si dice che è **illimitato inferiormente**.

Se l'insieme E è limitato sia superiormente sia inferiormente, si dice **limitato**; in tal caso, si può sempre trovare un numero positivo k tale che $\forall x \in E$: $|x| \leq k$.

Sia E un insieme di numeri reali limitato superiormente. Si chiama **estremo superiore** di E il numero L che gode delle seguenti proprietà:

1. ogni numero di E è minore o uguale a L;

2. comunque si fissi un numero positivo ε, esiste sempre almeno un numero di E più grande del numero $L - \varepsilon$.

Esso risulta, dunque, il più piccolo dei maggioranti di E. Il numero L si indica anche con $\sup E$.

L'estremo superiore L di un insieme E di numeri reali, non vuoto e limitato superiormente, può appartenere oppure no a E. Quando L appartiene a E, allora il numero L è detto **massimo** di E (M), e si scrive $M = \max E$.

Quando invece L non appartiene a E, allora E non ammette il massimo, e il numero L è il più piccolo fra i maggioranti di E.

Se l'insieme E è illimitato superiormente si dirà, per definizione, che il suo estremo superiore è $+\infty$.

Sia E un insieme di numeri reali limitato inferiormente. Si chiama **estremo inferiore** di E il numero ℓ che gode delle seguenti due proprietà:

1. ogni numero di E è maggiore o uguale a ℓ;

2. comunque si fissi un numero positivo ε, esiste sempre almeno un numero di E minore del numero $\ell + \varepsilon$.

Esso risulta, dunque, il più grande dei minoranti di E. Il numero ℓ si indica anche con $\inf E$.

Quando ℓ appartiene a E, allora il numero ℓ è detto **minimo** di E (m), e si scrive $m = \min E$.

Se invece ℓ non appartiene a E, allora E non ha minimo e il numero ℓ è il più grande fra i numeri che sono minori di tutti i numeri di E, cioè è il più grande dei minoranti di E.

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 76

Se poi l'insieme E è illimitato inferiormente, allora, per definizione, si dirà che l'estremo inferiore è $-\infty$.

Ogni insieme di numeri reali ammette uno e un solo estremo superiore (che può essere un numero L o il simbolo $+\infty$), e uno e un solo estremo inferiore (che può essere un numero ℓ o il simbolo $-\infty$); ed è sempre $\ell \leq L$.

1.3 Funzioni

Si definisce **funzione reale di variabile reale**, o semplicemente **funzione reale**, ogni corrispondenza f che a un numero reale di un qualsiasi sottoinsieme $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}$ associa uno e un solo numero reale:

$f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f: x \in \mathcal{D} \to y = f(x)$

dove $\mathcal{D}$ è detto **insieme di definizione** o **dominio** o **campo di esistenza** di f. **1**

L'insieme dei valori assunti da f prende il nome di **insieme immagine** o **insieme delle immagini** di $f(x)$.

Una funzione può essere scritta sostanzialmente in due modi:

- la sua equazione è data da un'unica espressione analitica;
- la sua equazione è definita **per casi** o **a tratti**; ad esempio:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Una funzione $f(x)$ si dice **limitata superiormente** se
$\exists\, M \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq M$ per $x \in \mathcal{D}$. **2**

Una funzione $f(x)$ si dice **limitata inferiormente** se
$\exists\, m \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq m$ per $x \in \mathcal{D}$. **3**

Una funzione superiormente e inferiormente limitata si dice **limitata**.

Una funzione $f(x)$ si dice **monotòna** (**strettamente**) **crescente** se:
$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (f(x_1) < f(x_2))$. **4**

Una funzione $f(x)$ si dice **monotòna** (**strettamente**) **decrescente** se:
$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ con $x_1, x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \qquad (f(x_1) > f(x_2))$. **5**

Un punto $x_M \in \mathcal{D}$ è detto punto di **massimo assoluto** per la funzione $f(x)$ se
$\forall x \in \mathcal{D}$ si ha $f(x) \leq f(x_M)$. **6**

Un punto $x_m \in \mathcal{D}$ è detto punto di **minimo assoluto** per la funzione $f(x)$ se
$\forall x \in \mathcal{D}$ si ha $f(x) \geq f(x_m)$. **7**

Se le precedenti relazioni non valgono in tutto $\mathcal{D}$ ma solo in un opportuno intorno di M, m, i punti vengono rispettivamente detti **massimo relativo** e **minimo relativo**.

Una funzione $f(x)$ si dice **pari** se e solo se

$$f(-x) = f(x) \,,$$ **8**

cioè se il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y.

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 77

Una funzione $f(x)$ si dice **dispari** se e solo se

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}\,, \qquad (9)$$

cioè se il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'origine O.

Una funzione $f(x)$ si dice **periodica** di periodo T se

$$\boxed{f(x) = f(x + kT)} \qquad \forall x \in \mathcal{D},\ k \in \mathbb{Z} \text{ e } T \in \mathbb{R}^+. \qquad (10)$$

Il grafico della funzione si ripete quindi per intervalli di ampiezza T.

1.4 Funzioni continue

La funzione $f(x)$ si dice **continua nel punto** x_0 se

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}\,, \qquad (11)$$

cioè se il limite della funzione per x che tende a x_0 è uguale al valore assunto dalla funzione in x_0, con $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

Se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x)$ è **continua a sinistra in** x_0; **12**

se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x)$ è **continua a destra in** x_0.

La funzione $f(x)$, definita su un intervallo $[a; b]$, si dice **continua in** $[a; b]$ se è continua in ogni punto dell'intervallo e si indica con $f(x) \in \mathcal{C}([a; b])$.

Sono funzioni continue nel loro dominio le funzioni razionali intere, razionali fratte, le irrazionali, le goniometriche, le esponenziali e le logaritmiche. **13**

Sono funzioni continue anche la somma, il prodotto, il quoziente (funzione al denominatore mai nulla), la funzione inversa e la composizione di funzioni continue. **14**

Punti di discontinuità

Un punto x_0 si dice **punto di discontinuità** (o **punto singolare**) per la funzione $f(x)$ se tale funzione non è continua in x_0.

La funzione $f(x)$ presenta una **discontinuità di 1ª specie**, o un **salto**, in x_0 se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x) = m \ (\ell, m \text{ finiti}), \qquad \text{salto} = |m - \ell|. \qquad (15)$$

La funzione $f(x)$ presenta una **discontinuità di 2ª specie** in x_0 se almeno uno dei limiti

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x),\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ non esiste o è infinito.} \qquad (16)$$

La funzione $f(x)$ presenta una **discontinuità di 3ª specie**, o **eliminabile**, in x_0 se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell,\ \ell \text{ finito, ma } \ell \neq f(x_0) \text{ oppure } \nexists f(x_0). \qquad (17)$$

L'aggettivo *eliminabile* deriva dal fatto che la funzione $f(x)$ può essere resa continua in x_0 o completando la definizione di $f(x)$ in x_0 come $f(x_0) = \ell$, se $\nexists f(x_0)$, oppure cambiando il valore di $f(x)$ in x_0 con $f(x_0) = \ell$, se inizialmente $f(x_0) \neq \ell$. La nuova funzione ottenuta si chiama **prolungamento per continuità** di $f(x)$ nel punto x_0.

Teoremi sulle funzioni continue

Teorema di Weierstrass

Una funzione $f(x)$ continua su un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ è ivi limitata e ammette, in tale intervallo, massimo e minimo.

In forma simbolica:

$$f(x) \in \mathcal{C}([a; b]) \Rightarrow \exists\, x_m,\ x_M \in [a; b] \mid \forall x \in [a; b],\ f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M). \qquad (18)$$

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 78

Teorema di Bolzano-Darboux
Una funzione $f(x)$ continua su un intervallo chiuso e limitato $[a;b]$ assume, almeno una volta, qualunque valore compreso tra il suo massimo e il suo minimo nell'intervallo.

In forma simbolica:

$f(x) \in \mathcal{C}([a;b]) \Rightarrow \forall k \in [f(x_m); f(x_M)] \ \exists \overline{x} \in [a;b] \mid f(\overline{x}) = k.$ **19**

Teorema di esistenza degli zeri
Se una funzione $f(x)$, continua su un intervallo chiuso e limitato $[a;b]$, assume agli estremi di tale intervallo valori discordi, allora esiste almeno un punto interno all'intervallo in cui la funzione si annulla.

In forma simbolica:

$f(x) \in \mathcal{C}([a;b]) \wedge f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a;b) \mid f(c) = 0.$ **20**

1.5 Calcolo di limiti

Per il calcolo dei limiti della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$, per x che tende a $\overline{x} \in \mathbb{R}$, potendo essere $\overline{x}$ uno dei casi: $x_0, x_0^-, x_0^+, -\infty, +\infty$, valgono le seguenti regole. **21**

$\lim_{x\to\bar{x}} f(x)$	$\lim_{x\to\bar{x}} g(x)$	$\lim_{x\to\bar{x}} [f(x)+g(x)]$	$\lim_{x\to\bar{x}} [f(x)\cdot g(x)]$	$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ (finito)	m (finito)	$\ell + m$	$\ell \cdot m$	$\frac{\ell}{m}$ se $m \neq 0$ $-\infty$ se $\begin{cases} \ell > 0 \text{ e } m = 0^- \\ \ell < 0 \text{ e } m = 0^+ \end{cases}$ $+\infty$ se $\begin{cases} \ell < 0 \text{ e } m = 0^- \\ \ell > 0 \text{ e } m = 0^+ \end{cases}$ $\frac{0}{0}$ forma indeterminata
$\ell \neq 0$ (finito)	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ se $\ell > 0$ $+\infty$ se $\ell < 0$	0
	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$ se $\ell < 0$ $+\infty$ se $\ell > 0$	0
0	∞	∞	$0 \cdot \infty$ forma indeterminata	0
$-\infty$	$m \neq 0$ (finito)	$-\infty$	$-\infty$ se $m > 0$ $+\infty$ se $m < 0$	$-\infty$ se $m > 0$ $+\infty$ se $m < 0$
$+\infty$		$+\infty$	$-\infty$ se $m < 0$ $+\infty$ se $m > 0$	$-\infty$ se $m < 0$ $+\infty$ se $m > 0$
∞	0	∞	$\infty \cdot 0$ forma indeterminata	$\frac{\infty}{0} = \infty$ con regola dei segni
∞	∞	$-\infty - \infty = -\infty$ $+\infty + \infty = +\infty$ $-\infty + \infty$ o $+\infty - \infty$ forma indeterminata	∞ con regola dei segni	$\frac{\infty}{\infty}$ forma indeterminata

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 79

In modo analogo vale:

$$\lim_{x \to \overline{x}} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \to \overline{x}} f(x)\right]^{\lim\limits_{x \to \overline{x}} g(x)} \quad \textbf{22}$$

purché i limiti a secondo membro esistano finiti e diversi da 0.

1.6 Limiti notevoli

Nella seguente tabella sono riassunti alcuni limiti notevoli e la loro generalizzazione.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \lim_{f(x) \to 0} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1 \quad \textbf{23}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \qquad \lim_{f(x) \to 0} \frac{1 - \cos f(x)}{f(x)} = 0 \quad \textbf{24}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{f(x) \to 0} \frac{1 - \cos f(x)}{[f(x)]^2} = \frac{1}{2} \quad \textbf{25}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{f(x) \to \infty} \left[1 + \frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)} = e \quad \textbf{26}$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{f(x) \to 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e \quad \textbf{27}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{f(x) \to 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1 \quad \textbf{28}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad \lim_{f(x) \to 0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} = \ln a \quad \textbf{29}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 + x)}{x} = 1 \qquad \lim_{f(x) \to 0} \frac{\ln [1 + f(x)]}{f(x)} = 1 \quad \textbf{30}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e \qquad \lim_{f(x) \to 0} \frac{\log_a [1 + f(x)]}{x} = \log_a e \quad \textbf{31}$$

$$\lim_{x \to \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n = \infty \quad \textbf{32}$$

con la regola dei segni applicata ad $a_n x^n$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} =$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{se } n > m \text{ con regola dei segni applicata a } \dfrac{a_n}{b_m} x^{n-m} \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases} \quad \textbf{33}$$

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 80

1.7 Forme indeterminate

Qui di seguito sono riassunte le forme indeterminate in cui si può presentare un limite e le loro possibili risoluzioni: **34**

▷ *Forma indeterminata del tipo* $\frac{0}{0}$

Passaggi algebrici (si cerca di trasformare le funzioni applicandone le proprietà caratteristiche, e, se permane l'indeterminazione, si ricerca all'interno dell'espressione, di cui si vuole calcolare il limite, la presenza di uno dei limiti notevoli), cambio di variabile, confronto tra limiti, teoremi di L'Hôpital.

▷ *Forma indeterminata del tipo* $\frac{\infty}{\infty}$

Passaggi algebrici (si cerca di trasformare le funzioni, applicandone le proprietà, moltiplicando e dividendo per opportuni termini o raccogliendo potenze dell'incognita, in modo da ottenere una forma determinata), cambio di variabile, confronto tra limiti, teoremi di L'Hôpital.

▷ *Forma indeterminata del tipo* $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x\to\overline{x}} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to\overline{x}} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \begin{cases} \frac{0}{0} \\ \frac{\infty}{\infty} \end{cases}$$ riconducendosi ai casi precedenti.

▷ *Forma indeterminata del tipo* $+\infty-\infty$ $(-\infty+\infty)$

$$\lim_{x\to\overline{x}} [f(x)-g(x)] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x)\left[1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right] \\ \lim\limits_{x\to\overline{x}} g(x)\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right] \end{cases}$$ riconducendosi alla forma $\frac{\infty}{\infty}$

oppure

$$\lim_{x\to\overline{x}} [f(x)-g(x)] = \lim_{x\to\overline{x}} [f(x)-g(x)]\frac{f(x)+g(x)}{f(x)+g(x)}$$ riconducendosi a una forma determinata o alla forma $\frac{\infty}{\infty}$.

▷ *Forme indeterminate del tipo* 0^0, ∞^0, 1^∞

Si cerca di trasformare le funzioni, applicandone le proprietà o moltiplicando e dividendo per opportuni termini (ad esempio $[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$), in modo da ottenere una forma determinata, una delle precedenti forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ o uno dei limiti notevoli.

1.8 Asintoti di una funzione

Data la funzione $f(x)$:

▷ se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, si dice che la retta $x = x_0$ è **asintoto verticale** per il grafico della funzione; **35**

▷ se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$, si dice che la retta $y = \ell$ è **asintoto orizzontale** per il grafico della funzione. **36**

La retta $y = mx + q$ è **asintoto obliquo** per la funzione $f(x)$ se e solo se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m,\ m \neq 0 \text{ e finito} \quad \wedge \quad \lim_{x\to\infty} [f(x)-mx] = q,\ q \text{ finito.}$$ **37**

Nel caso in cui la funzione $f(x)$ sia razionale fratta, essa ammette asintoto obliquo se il grado del numeratore è maggiore di un'unità rispetto a quello del denominatore.

2 Esercizi svolti

Altri problemi e quesiti sono presenti all'indirizzo www.loescher.it/librionline

Problema 1

PROBLEMA 1
A.S. 1998/1999
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

+ risorse online

In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è data la parabola γ di equazione

$$y = \frac{x^2}{2} - x.$$

Siano A un punto dell'asse x di ascissa λ, con $\lambda > 0$, B il suo simmetrico rispetto a O, A' e B' i punti della parabola le cui proiezioni ortogonali sull'asse x sono rispettivamente A e B.

Il candidato:

a. verifichi che le tangenti a e b alla parabola γ, rispettivamente in A' e B', si incontrano in un punto E dell'asse y;

b. detti C e D i rispettivi punti d'intersezione di a e b con l'asse x, esprima in funzione di λ l'area s del triangolo CED;

c. studi la funzione $s(\lambda)$ e tracci, in un piano riferito a un sistema di assi ortogonali $O'\lambda s$, la curva $\mathcal{C}$ di equazione $s = s(\lambda)$;

d. detto λ_0 il valore di λ per cui s assume valore minimo relativo, e detti a_0 e b_0 le posizioni di a e b per detto valore, calcoli l'area della regione finita del semipiano di equazione $y \leq 0$, compresa tra γ, a_0 e b_0;

e. osservato che, nell'ipotesi posta di $\lambda > 1$, esistono due valori λ_1 e λ_2, con $\lambda_1 < \lambda_2$, per cui il triangolo CED è equivalente al quadrato di lato OA, descriva una procedura che consenta di calcolare i valori approssimati di λ_1 con un'approssimazione di 10^{-n} e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

Risoluzione

Utilizzando le condizioni indicate si trovano i punti $A(\lambda; 0)$, $B(-\lambda; 0)$, $A'\left(\lambda; \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda\right)$ e $B'\left(-\lambda; \frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda\right)$.

a. La funzione $y = \dfrac{x^2}{2} - x$, il cui grafico è la parabola rappresentata in **figura 1**, ammette come derivata prima la funzione $y' = x - 1$.

Poiché l'equazione della tangente a una funzione $y = f(x)$ nel punto x_0 è data da $y - y(x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$, si ricava che la tangente in A' ha equazione

$$a : y = (\lambda - 1)x - \tfrac{1}{2}\lambda^2$$

mentre quella in B' ha equazione

$$b : y = -(\lambda + 1)x - \tfrac{1}{2}\lambda^2.$$

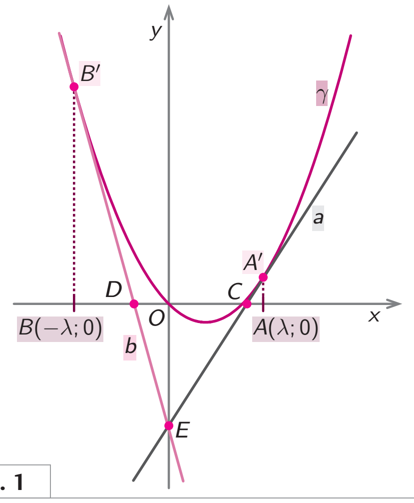


FIG. 1

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 82

Le due tangenti, avendo lo stesso termine noto, si incontreranno nel punto dell'asse y di coordinate $E\left(0; -\frac{1}{2}\lambda^2\right)$.

b. Le coordinate dei punti C e D, rispettivamente intersezioni di a e b con l'asse x, si ricavano ponendo a sistema le equazioni delle due tangenti con $y = 0$, ottenendo

$$C\left(\frac{\lambda^2}{2(\lambda-1)}; 0\right) \text{ e } D\left(-\frac{\lambda^2}{2(\lambda+1)}; 0\right).$$

L'area del triangolo CED è $\mathcal{A}_{CED} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{OE} = \frac{1}{2} \cdot |x_C - x_D| \cdot |y_E|$ ovvero

$$\mathcal{A}_{CED} = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{\lambda^2}{2(\lambda-1)} + \frac{\lambda^2}{2(\lambda+1)}\right| \cdot \frac{\lambda^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^3 - \lambda^2}{2(\lambda^2-1)}\right| \cdot \frac{\lambda^2}{2} =$$

$$= \frac{\lambda^5}{4\left|\lambda^2 - 1\right|} = s(\lambda),$$

con $\lambda > 0$.

c. Data la funzione

$$s(\lambda) = \frac{\lambda^5}{4\left|\lambda^2 - 1\right|},$$

ricordato che $\lambda > 0$, ricaviamo immediatamente che essa è definita nell'intervallo $]0; 1[\, \cup\,]1; +\infty[$ e possiamo riscriverla per casi:

$$s(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\lambda^5}{4\left(\lambda^2-1\right)} & \text{per } 0 < \lambda < 1 \\ \dfrac{\lambda^5}{4\left(\lambda^2-1\right)} & \text{per } \lambda > 1 \end{cases}$$

Il comportamento agli estremi del campo di esistenza è:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \left[-\frac{\lambda^5}{4\left(\lambda^2-1\right)}\right] = 0 \qquad \lim_{\lambda \to 1^-} \left[-\frac{\lambda^5}{4\left(\lambda^2-1\right)}\right] = +\infty$$

$$\lim_{\lambda \to 1^+} \frac{\lambda^5}{4\left(\lambda^2-1\right)} = +\infty \qquad \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^5}{4\left(\lambda^2-1\right)} = +\infty$$

per cui la funzione ammette asintoto verticale di equazione $\lambda = 1$, mentre non ammette né asintoti orizzontali né obliqui, essendo il numeratore di 3 gradi maggiore del denominatore.

La funzione si annulla per $\lambda = 0$, ma tale valore non appartiene al dominio e quindi $s(\lambda)$ non ha intersezioni con gli assi e assume valori sempre positivi essendo:

- $\lambda^5 > 0\ \forall\lambda$ con $\lambda > 0$
- $-\left(\lambda^2 - 1\right) > 0\ \forall\lambda$ con $0 < \lambda < 1$
- $\lambda^2 - 1 > 0\ \forall\lambda$ con $\lambda > 1$

Derivando avremo:

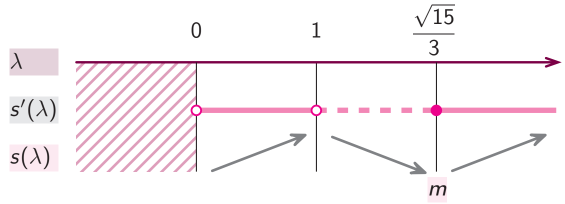
$$s'(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{5\lambda^4\left(\lambda^2-1\right) - \lambda^5 \cdot 2\lambda}{4\left(\lambda^2-1\right)^2} & \text{per } 0 < \lambda < 1 \\ \dfrac{5\lambda^4\left(\lambda^2-1\right) - \lambda^5 \cdot 2\lambda}{4\left(\lambda^2-1\right)^2} & \text{per } \lambda > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 83

$$s'(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\lambda^4\left(3\lambda^2-5\right)}{4\left(\lambda^2-1\right)^2} & \text{per } 0<\lambda<1 \\[2ex] \dfrac{\lambda^4\left(3\lambda^2-5\right)}{4\left(\lambda^2-1\right)^2} & \text{per } \lambda>1 \end{cases}$$

La derivata prima si annulla per $\lambda = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ ($\lambda = 0$ e $\lambda = -\frac{\sqrt{15}}{3}$ non appartengono al dominio) e risulta essere sempre positiva se $0<\lambda<1$, mentre se $\lambda>1$ $s'(\lambda)>0 \Leftrightarrow \lambda > \frac{\sqrt{15}}{3}$ (si veda lo schema seguente).

La funzione $s(\lambda)$ ammette un minimo relativo nel punto $m\left(\frac{\sqrt{15}}{3}; \frac{25\sqrt{15}}{72}\right)$.



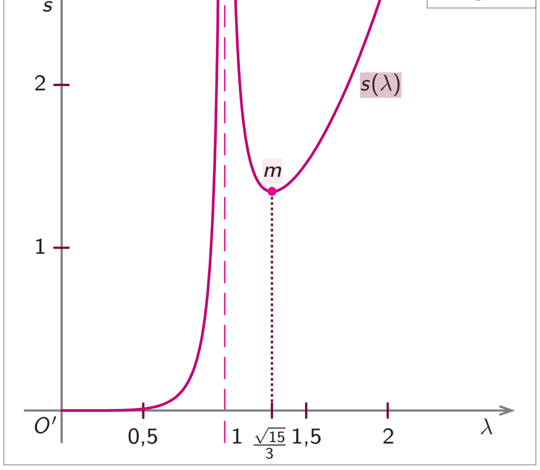
Derivando ancora:

$$s''(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\lambda^3\left(3\lambda^4-9\lambda^2+10\right)}{2\left(\lambda^2-1\right)^3} & \text{per } 0<\lambda<1 \\[2ex] \dfrac{\lambda^3\left(3\lambda^4-9\lambda^2+10\right)}{2\left(\lambda^2-1\right)^3} & \text{per } \lambda>1 \end{cases}$$

La funzione derivata seconda risulta sempre positiva nel campo di esistenza per cui $s(\lambda)$ non presenta punti di flesso e ha sempre concavità verso l'alto.

Il grafico di $s(\lambda)$ è rappresentato in **figura 2**.

FIG. 2



d. Posto $\lambda_0 = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$, le corrispondenti rette a e b hanno rispettivamente equazioni (**figura 3**):

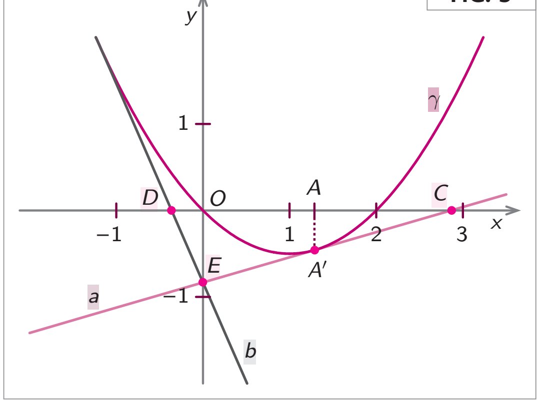
a_0: $y = \left(\frac{\sqrt{15}}{3} - 1\right)x - \frac{5}{6}$ e

b_0: $y = -\left(\frac{\sqrt{15}}{3} + 1\right)x - \frac{5}{6}$,

mentre i punti A', C, D, E hanno coordinate

$A'\left(\frac{\sqrt{15}}{3}; \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$, $C\left(\frac{5}{12}\left(3+\sqrt{15}\right); 0\right)$, $D\left(\frac{5}{12}\left(3-\sqrt{15}\right); 0\right)$, $E\left(0; -\frac{5}{6}\right)$.

FIG. 3



Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 84

Per il calcolo dell'area della regione finita del semipiano di equazione $y \leq 0$, compresa tra γ, a_0 e b_0, il testo dà adito a due interpretazioni, entrambe accettabili.

Prima interpretazione. L'area della regione finita di piano richiesta è quella che si ottiene sottraendo l'area sottesa alla parabola γ tra O e A dalla somma delle aree dei triangoli DOE e del trapezio $OEA'A$:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DO} \cdot \overline{OE} + \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{OE} + \overline{AA'}\right) \cdot \overline{OA} - \left| \int_0^{\frac{\sqrt{15}}{3}} \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \mathrm{d}x \right| =$$

$$= \frac{25\left(\sqrt{15}-3\right)}{144} + \frac{15}{18} - \frac{5 \cdot \left(9 - \sqrt{15}\right)}{54} = \frac{5}{48} \cdot \left(\frac{23\sqrt{15}}{9} - 5\right).$$

Seconda interpretazione. L'area richiesta è quella che si ottiene sottraendo l'area del segmento parabolico delimitato da γ e dall'asse x nell'intervallo $[0; 2]$, dall'area del triangolo CED che vale $s\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$:

$$\mathcal{A} = s\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right) - \left| \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \mathrm{d}x \right| = \frac{25\sqrt{15}}{72} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{25\sqrt{15}}{24} - 2\right).$$

e. Posto $\lambda > 1$, si ha

$$4s(\lambda) = \frac{\lambda^5}{4\left(\lambda^2 - 1\right)}$$

e la lunghezza del segmento OA è proprio λ. Per l'equivalenza tra il triangolo CED e il quadrato di lato OA dovrà valere

$$\frac{\lambda^5}{4\left(\lambda^2 - 1\right)} = \lambda^2 \quad \text{o anche} \quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{\lambda^5}{4\left(\lambda^2 - 1\right)} \\ y_2 = \lambda^2 \end{cases}$$

ricercando quindi i punti comuni a due curve.

Disegnati i rispettivi grafici delle curve in un piano di riferimento $O'\lambda y$, il primo grafico è un caso particolare di quelli studiati nel precedente punto **c**, mentre il secondo è una parabola con vertice nell'origine (**figura 4**, con $\lambda = x$).

Dal grafico si può notare che le funzioni si intersecano per due valori di $\lambda > 1$ e che $\lambda_1 \in (1; 1{,}5)$, essendo $\lambda_1 < \lambda_2$.

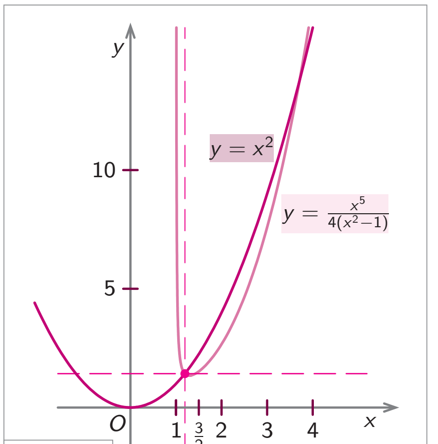


FIG. 4

Dall'equazione $\dfrac{\lambda^5}{4\left(\lambda^2 - 1\right)} = \lambda^2$ si ricava $\lambda^5 = 4\lambda^4 - 4\lambda 2 \;\Rightarrow\; \lambda^2\left(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\right) = 0$,

per cui il valore di $\lambda_1 \in (1; 1{,}5)$ deve essere uno zero dell'equazione $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4 = 0$ e per determinarlo possiamo applicare il metodo di bisezione alla funzione

$f(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4$ nell'intervallo $I = (1; 1{,}5)$, con $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 85

Assumendo, a nostra scelta, un'approssimazione di 10^{-2} avremo:

TAB. 1

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	$\|b_n - a_n\|$
0	1	1	1,5	−1,625	1,25	−0,2969	0,5
1	1	1	1,25	−0,2969	1,125	0,3613	0,25
2	1,125	0,3613	1,25	−0,2969	1,1875	0,0339	0,125
3	1,1875	0,0339	1,25	−0,2969	1,2188	−0,0996	0,0625
4	1,1875	0,0339	1,2188	−0,0996	1,2032	−0,0489	0,0313
5	1,1875	0,0339	1,2032	−0,0489	1,1954	−0,0077	0,0157
6	1,1875	0,0339	1,1954	−0,0077	1,1915		0,0079

Si ricava quindi che $\lambda_1 \approx 1{,}1915$ (un valore più preciso è $\lambda_1 \approx 1{,}193936566$).

Una possibile pseudocodifica in linguaggio progetto, per la situazione presentata, è la seguente:

```
programma BISEZIONE
costanti     a=1
             b=1,5
variabili    n     di tipo intero
             xn    di tipo reale
procedura LEGGI
      inizio
             ripeti
                   scrivi('Inserire il valore di n: ')
                   leggi(n)
             finché n>0
      fine
funzione FUNZ (λ di tipo reale) di tipo reale
      inizio
             FUNZ ← λ³ − 4λ² + 4
      fine
funzione POTENZA (esp di tipo intero) di tipo reale
      inizio
             se esp=0    allora      POTENZA ← 1
                         altrimenti  POTENZA ← 10·POTENZA(esp-1)
      fine
procedura BISEZ(x1,x2 di tipo reale; var xn di tipo reale)
      inizio
             ripeti
                   xn ← (x1+x2)/2
                   se FUNZ(xn)·FUNZ(x1)>0   allora x1 ← xn
                                            altrimenti x2 ← xn
             finché |x2-x1|<1/POTENZA(n) e FUNZ(xn)<POTENZA(n)
      fine
INIZIO (PROGRAMMA PRINCIPALE)
      scrivi ('Programma per il calcolo, con il metodo di bisezione,')
      scrivi ('dello zero λ1 della funzione f(λ)=λ³ − 4λ² + 4')
      scrivi ('appartenente all'intervallo I=(1;1,5) e con un'approssimazione di 10^-n')
      LEGGI
      BISEZ (a, b, xn)
      scrivi ('Il valore cercato è λ1 ≈ ', xn)
 FINE.
```

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 86

Problema 2

PROBLEMA **1**
A.S. 1999/2000
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale tale che valgano le seguenti condizioni:

$f(x_0) > 0,\ f'(x_0) > 0,\ f''(x_0) = 0,$

dove x_0 è un particolare valore reale.

a. Spiegare perché tali condizioni non sono sufficienti a determinare l'andamento di $f(x)$ in un intorno di x_0.

b. Trovare almeno tre funzioni polinomiali $f(x)$, di grado superiore al 1°, aventi andamenti diversi in $x_0 = 0$, tali che: $f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0$.

c. Determinare, se possibile, tutte le rette tangenti ai grafici delle funzioni trovate e parallele alla retta di equazione $y = x + 1$.

d. A completamento del problema dimostrare la formula che esprime la derivata, rispetto a x, della funzione x^n, dove n è un intero qualsiasi non nullo.

Risoluzione

a. Le condizioni assegnate non sono sufficienti a determinare l'andamento di $f(x)$ in un intorno I di x_0 perché non si conosce il segno di $f''(x_0)$ in tale intorno. Si può avere infatti:

- $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$) in tutto l'intorno $I \setminus \{x_0\} \Rightarrow$ la funzione ha sempre concavità verso il basso (verso l'alto);
- $f''(x_0) < 0$ per $x < x_0$ e $f''(x_0) > 0$ per $x > x_0 \Rightarrow$ la funzione presenta un flesso ascendente in x_0;
- $f''(x_0) > 0$ per $x < x_0$ e $f''(x_0) < 0$ per $x > x_0 \Rightarrow$ la funzione presenta un flesso discendente in x_0.

b. Le tre funzioni cercate si possono ottenere dalla generica equazione

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

imponendo le condizioni richieste. Si trova in tal modo:

$f(0) = 1 \ \Rightarrow\ e = 1,\ f'(0) = 1 \ \Rightarrow\ d = 1,\ f''(0) = 0 \ \Rightarrow\ c = 0$ cioè

$f(x) = ax^4 + bx^3 + x + 1$ e $f''(x) = 12ax^2 + 6bx$.

- Se $a = 0$ e $b = 1 \Rightarrow f_1(x) = x^3 + x + 1,\ f''(x) = 6x \Rightarrow$ flesso ascendente in $x = 0$;
- se $a = 0$ e $b = -1 \Rightarrow f_2(x) = x^3 + x + 1,\ f''(x) = -6x \Rightarrow$ flesso discendente in $x = 0$;
- se $a = 1$ e $b = 0 \Rightarrow f_2(x) = x^4 + x + 1,\ f''(x) = 12x^2 \Rightarrow$ concavità sempre verso l'alto.

Avremo pertanto $f_1(x) = x^3 + x + 1,\ f_2(x) = -x^3 + x + 1,\ f_3 = x^4 + x + 1$.

c. La retta tangente a una funzione $f(x)$ nel punto x_0 ha equazione

$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Essendo

$f_1'(x) = 3x^2 + 1,\ f_2'(x) = -3x^2 + 1,$
$f_3'(x) = 4x^3 + 1,$

imponendo la condizione di parallelismo per cui $f_1'(x) = f_3'(x) = 1$, si ricava, per tutte e tre le funzioni, $x = 0$ e pertanto la stessa retta $y = x + 1$ risulta essere tangente al grafico delle tre funzioni nel punto $T(0;1)$ (**figura 1**).

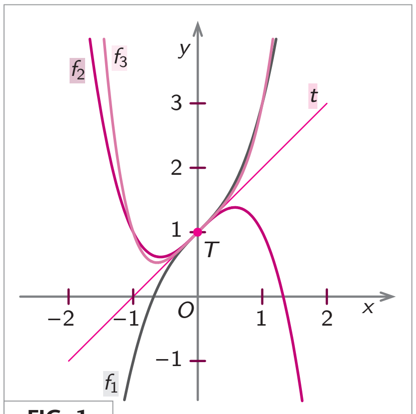


FIG. 1

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 87

d. Data la funzione $f(x) = x^n$, si può riscrivere la funzione utilizzando l'esponenziale e più precisamente $f(x) = x^n = e^{\ln x^n}$, da cui, applicando le proprietà dei logaritmi, $f(x) = e^{n \ln x}$ con $n \in \mathbb{R}$ e pertanto valida anche per n intero.

In base alla regola di derivazione di una funzione composta, si ottiene:

$$f'(x) = (x^n)' = (e^{n \ln x})' = e^{n \ln x} \cdot \frac{n}{x} = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1},$$

che corrisponde alla formula richiesta.

Nel caso particolare $n \in \mathbb{N}$ la dimostrazione può essere effettuata anche nel seguente modo.

Per la definizione di derivata prima (limite del rapporto incrementale quando l'incremento della variabile indipendente tendente a zero) si ha:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

e, per lo sviluppo del binomio di Newton,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + \binom{n}{n}h^{n-1}\right] = \binom{n}{1}x^{n-1} = nx^{n-1},$$

ottenendo la formula desiderata.

Quesito 1

QUESITO 1
A.S. 2000/2001
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \to \ell$ per $x \to a$, essendo ℓ e a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = \ell$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Risoluzione

L'esistenza del limite finito $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ non è sufficiente ad affermare che $f(a) = \ell$, perché non è specificato espressamente se a appartiene o no al dominio della funzione, quindi potrebbe accadere che $\nexists f(a)$, e anche vi appartenesse potrebbe essere $f(a) \neq \ell$.

Se a non appartiene al dominio $\mathcal{D}$ della funzione, esso è un punto di accumulazione per $\mathcal{D}$, ed essendo $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \neq f(a)$, perché $\nexists f(a)$, il punto a è punto di discontinuità di terza specie **17**; ad esempio:

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

non è definita in $x = a$ ma $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x+a)(x-a)}{x - a} = 2a.$

Se invece a appartiene al dominio $\mathcal{D}$ della funzione e supposto che $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \neq f(a)$, il punto a è nuovamente un punto di discontinuità di terza specie perché $f(a) \neq \ell$; ad esempio:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} & \text{se } x \neq a \\ a & \text{se } x = a \end{cases} \quad \text{e } a \neq 0,$$

è definita in $x = a$ ma $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a \neq a = f(a).$

QUESITO 9
A.S. 2000/2001
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

Quesito 2

Il limite della funzione $\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x}$ quando x tende a $+\infty$,

a. è uguale a 0;

b. è uguale a 1;

c. è un valore diverso dai due precedenti;

d. non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

Risoluzione

Calcoliamo il limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x}$. La funzione al numeratore, $\operatorname{sen} x - \cos x$, poiché composta da funzioni periodiche, non ammette limite per $x \to +\infty$ ma è ivi sicuramente limitata.

Tenuto conto che $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$ si avrà $-2 \leq \operatorname{sen} x - \cos x \leq 2$, da cui

$$-\frac{2}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x} \leq \frac{2}{x}.$$

Essendo $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, per il teorema del confronto si ricava

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x} = 0$ e la risposta corretta è la **a.**

QUESITO 10
A.S. 2000/2001
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

Quesito 3

Si consideri la funzione $\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolare il limite per $x \to +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di L'Hôpital.

Risoluzione guidata

Il limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}$ si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ **34**. Raccogliendo x al numeratore e al denominatore ricaviamo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{\cos x}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 - \frac{\cos x}{x}}.$$

Le funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, poiché funzioni periodiche, non ammettono limite per $x \to +\infty$ ma sono ivi sicuramente limitate **2**, **3** e assumono rispettivamente valori finiti h e k tali che

$-1 \leq h \leq 1$ e $-1 \leq k \leq 1$

Vale quindi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h}{x} = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{k}{x} = 0$

Esiste il limite proposto:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 - \frac{\cos x}{x}} = \frac{1 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Affinché valga il teorema di L'Hôpital per un limite che si presenta nella forma $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ (come nel nostro caso), deve esistere un intorno di $+\infty$, $I_M(+\infty)$, tale che $\forall x \in I_M(+\infty)$ (o anche $\forall x > M$) le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano derivabili, esistano cioè $f'(x), g'(x)$, e $g'(x) \neq 0$.

Considerata la funzione $g(x) = x - \cos x$, si ha $g'(x) = 1 + \operatorname{sen} x$ con $g'(x) = 0$ se $\operatorname{sen} x = -1$ cioè per $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Non essendo possibile determinare un intorno di $+\infty$ in cui valga sempre $g'(x) \neq 0$, il teorema non può essere applicato.

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 89

Quesito 4

QUESITO 2
A.S. 2000/2001
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$.

Risoluzione

L'equazione data è formata da espressioni razionali e trascendenti nell'incognita x, per cui è conveniente riscrivere l'equazione stessa in una forma più opportuna (uguaglianza di funzioni di x, almeno una di esse nota) per poter utilizzare un metodo risolutivo di tipo grafico.

Poiché $x = 0$ non è radice dell'equazione (infatti per tale valore si avrebbe $-2 \neq 0$), portando il 2 a secondo membro e dividendo per x si ottiene:

$$e^x + e^{-x} = \frac{2}{x}.$$

Posto

$$f(x) = e^x + e^{-x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{2}{x},$$

la ricerca delle soluzioni dell'equazione data è ricondotta alla ricerca delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f(x) = e^x + e^{-x} \\ g(x) = \dfrac{2}{x} \end{cases}$$

Studiamo la funzione f.

f è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è pari, cioè simmetrica rispetto all'asse y; infatti vale $f(-x) = e^{-x} + e^x = f(x)$ (condizione 8).

Il comportamento agli estremi del campo di esistenza è:

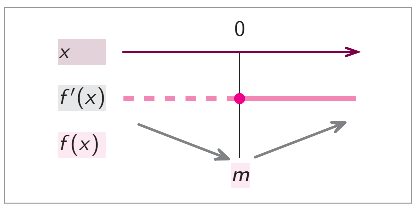
$$\lim_{x\to-\infty} (e^x + e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} e^x + \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = +\infty + 0 = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} (e^x + e^{-x}) = 0 + \infty = +\infty$$

e $f(0) = e^0 + e^0 = 2$, per cui la funzione passa per il punto $A(0; 2)$, è sempre positiva, non ammette né asintoti verticali né orizzontali.

Derivando avremo: $f'(x) = e^x - e^{-x}$.

La derivata prima si annulla per
$e^x - e^{-x} = 0 \;\Rightarrow\; e^x = e^{-x} \;\Rightarrow\; x = 0,$
è non negativa per
$e^x - e^{-x} \geq 0 \Rightarrow e^x \geq e^{-x} \Rightarrow$ per la crescenza di e^x,
$x \geq -x \;\Rightarrow\; 2x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 0.$



Si ottiene che: $x = 0$ è un punto di minimo assoluto, $m \equiv A(0; 2)$, f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$, strettamente crescente in $(0; +\infty)$.

Utilizzando il precedente studio, è ora possibile rappresentare il grafico della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$, mentre la funzione $g(x) = \dfrac{2}{x}$ è nota e il suo grafico è un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti (**figura 1**).

Dai grafici possiamo dedurre che le due funzioni si incontrano in un solo punto di ascissa positiva α.

$x = \alpha$ rappresenta anche l'unica radice dell'equazione $xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$.

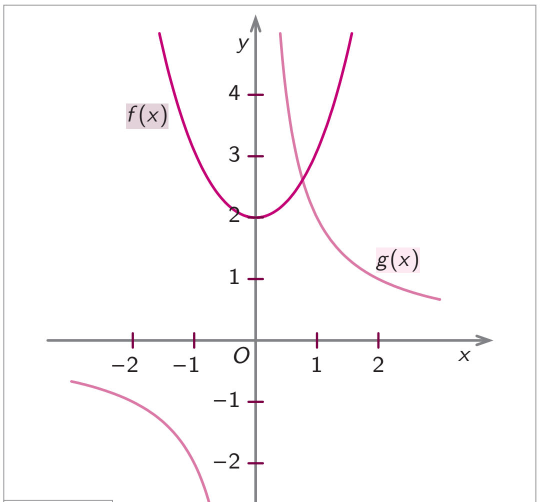


FIG. 1

Quesito 5

QUESITO 6
A.S. 2001/2002
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

Si consideri la funzione $f(x) = (2x - 1)^7(4 - 2x)^5$.

Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

Risoluzione guidata

La funzione data, sviluppati i calcoli, può essere riscritta come polinomio di 12° grado. Essendo i polinomi funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$, $f(x)$ lo sarà anche sull'intervallo chiuso $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ e soddisferà quindi le ipotesi del teorema di Weierstrass **18**: «ogni funzione continua su un insieme chiuso e limitato è limitata e assume massimo e minimo assoluti». La funzione $f(x)$ ammette quindi sicuramente un massimo e un minimo assoluti

Quesito 6

QUESITO 9
A.S. 2001/2002
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano la seguente equazione:

$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$.

Tale luogo è costituito da:

a. un punto; **b.** due punti; **c.** infiniti punti; **d.** nessun punto.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Risoluzione guidata

Il dominio dell'equazione $y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$ è dato, tenendo conto delle condizioni di realtà delle radici, da:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \ \vee x \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x = -1 \ \vee x = 1$$

Essendo l'equazione definita solo per $x = \pm 1$, il luogo geometrico da essa individuato è formato solo da due punti, $A(-1; 0)$ e $B(1; 0)$, e la risposta corretta è la **b**.

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 91

Quesito 7

QUESITO 4
A.S. 2001/2002
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n}{n!}$.

Risoluzione

È richiesto il calcolo del limite di una successione a termini positivi il cui termine generale può essere riscritto come:

$$\frac{3^n}{n!} = \frac{\overbrace{3\cdot 3\cdot \ldots \cdot 3}^{n \text{ volte}}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}.$$

Per la proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione si può scrivere:

$$\frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{n-1}\cdot\frac{3}{n}\cdot = \frac{9}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{n-1}\right)\cdot\frac{3}{n}.$$

I fattori indicati in parentesi tonda sono tutti minori di 1, quindi si ottiene:

$$0 \le \frac{3^n}{n!} = \frac{9}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{n-1}\cdot\right)\frac{3}{n} \le \frac{9}{2}\cdot(1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1)\frac{3}{n} = \frac{27}{2n}, \text{ cioè } 0 \le \frac{3^n}{n!} \le \frac{27}{2n}.$$

Poiché $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{27}{2n} = 0$ e ovviamente $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$, per il teorema del confronto dovrà essere:

$$0 \le \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!} \le 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

Quesito 8

QUESITO 5
A.S. 2001/2002
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Cosa si intende per funzione periodica? Qual è il periodo di $f(x) = -\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{3}$? Quale quello di $\operatorname{sen} 2x$?

Risoluzione

Una funzione reale di variabile reale $f(x)$ definita in un insieme $\mathcal{D}$ si dice periodica di periodo T se e solo se vale

$\forall x \in \mathcal{D},\ f(x+kT) = f(x)$ con $k \in \mathbb{Z}$ e $T \in \mathbb{R}^+$ (condizione **10**).

Si può notare che dovrà essere $x + kT \in \mathcal{D}$ e che la funzione sarà periodica anche per ogni multiplo intero kT di T. Il periodo T viene quindi detto **periodo principale** della funzione.

Nel caso della funzione $f(x) = -\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{3}$ varrà allora $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(x+kT)}{3}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3} \;\Rightarrow\; -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}+\frac{k\pi T}{3}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3}.$$

I due argomenti dovranno differire per un multiplo del periodo e, ricordato che la periodicità della funzione seno è 2π, si ricava:

$$\left(\frac{\pi x}{3}+\frac{k\pi T}{3}\right) - \frac{\pi x}{3} = 2k\pi \;\Rightarrow\; \frac{k\pi T}{3} = 2k\pi \;\Rightarrow\; T = 6.$$

Il periodo della funzione $f(x) = -\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{3}$ è quindi $T = 6$.

In modo analogo si ha $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen} 2(x+kT) = \operatorname{sen} 2x \;\Rightarrow\; 2(x+kT) - 2x = 2k\pi \;\Rightarrow\; 2kT = 2kT \;\Rightarrow\; T = \pi.$$

Il periodo della funzione $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ è quindi $T = \pi$.

Quesito 9

QUESITO 7
A.S. 2001/2002
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Data la funzione

$f(x) = e^x - \operatorname{sen} x - 3x$

calcolarne i limiti per x tendente a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con $0 < \alpha < 1$ in cui la funzione si annulla.

Risoluzione

Noto l'andamento delle funzioni che compongono $f(x) = e^x - \operatorname{sen} x - 3x$, il limite per $x \to +\infty$ si presenta nella forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$.

Raccogliendo e^x ricaviamo:

$$\lim_{x\to+\infty} (e^x - \operatorname{sen} x - 3x) = \lim_{x\to+\infty} e^x \left(1 - \tfrac{\operatorname{sen} x}{e^x} - \tfrac{3x}{e^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^x \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \tfrac{\operatorname{sen} x}{e^x} - \tfrac{3x}{e^x}\right).$$

La funzione $\operatorname{sen} x$, poiché funzione periodica, non ammette limite per $x \to +\infty$ ma è ivi sicuramente limitata e assume valore finito k tale che $-1 \le k \le 1$. Vale quindi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{k}{e^x} = 0.$$

Essendo $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty}$, applicando il teorema di L'Hôpital si ottiene:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{e^x} = 0.$$

Il limite della funzione data $x \to +\infty$ vale allora:

$$\lim_{x\to+\infty} (e^x - \operatorname{sen} x - 3x) = \lim_{x\to+\infty} e^x \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \tfrac{\operatorname{sen} x}{e^x} - \tfrac{3x}{e^x}\right) = +\infty \cdot (1 - 0 - 0) = +\infty.$$

Per $x \to -\infty$, tenuto conto delle osservazioni fatte precedentemente, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} (e^x - \operatorname{sen} x - 3x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen} x - \lim_{x\to-\infty} 3x = 0 - k - (-\infty) = +\infty.$$

Per verificare l'esistenza di α, con $\alpha \in]0;1[$ per cui $f(\alpha) = 0$, basta osservare che la funzione data è continua in tutto $\mathbb{R}$ e quindi anche in $[0;1]$ e agli estremi di tale intervallo assume valori discordi:

$f(0) = e^0 - 0 - 0 = 1 > 0;$

$f(1) = e^1 - \operatorname{sen} 1 - 3 = e - \operatorname{sen} 1 - 3 < 0.$

La funzione soddisfa quindi le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri **20** e si può concludere che esiste almeno un punto $\alpha \in]0;1[$ per cui $f(\alpha) = 0$.

Quesito 10

QUESITO 4
A.S. 2002/2003
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

Il dominio della funzione

$f(x) = \ln\left\{\sqrt{x+1} - (x-1)\right\}$

è l'insieme degli x reali tali che:

a. $-1 < x \le 3$; **b.** $-1 \le x < 3$; **c.** $0 < x \le 3$; **d.** $0 \le x < 3$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

Risoluzione guidata

La funzione data è una funzione logaritmica con argomento irrazionale e il suo dominio $\mathcal{D}$ è dato dall'insieme delle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}-(x-1) > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo} \\ x+1 \geq 0 & \text{condizione di esistenza della radice di indice pari} \end{cases}$$

La prima disequazione, riscritta nella forma $\sqrt{x+1} > x-1$, conduce alla coppia di sistemi:

$$\text{(I)} \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \text{(II)} \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ (\sqrt{x+1})^2 > (x-1)^2 \end{cases}$$

È facile notare che le condizioni dovute all'esistenza della radice (seconda disequazione) sono verificate in entrambi i sistemi che risolvono la prima disequazione, per cui possono essere omesse.

Risolvendo il sistema (I): $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 1$ o anche $x \in [-1;1[$

Risolvendo il sistema (II), dopo aver omesso la prima disequazione perché compresa nella terza, si ha:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x+1 > x^2-2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-3x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$1 \leq x < 3 \vee x \in [1;3[$.

Unendo le soluzioni dei sistemi (I) e (II) si trova che il dominio della funzione data è:

$\mathcal{D} = [-1;1[\cup [1;3[= [-1;3[$.

La risposta esatta è quindi la **b**.

Problema 3

PROBLEMA **2**
A.S. 2003/2004
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Sia f la funzione così definita:

$$f(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right)+x$$

con a e b numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti a e b, esiste sempre un valore di x tale che
$$f(x) = \frac{a+b}{2}.$$

2. Si consideri la funzione g ottenuta dalla f ponendo $a = 2b = 2$. Si studi g e se ne tracci il grafico.

3. Si consideri per $x > 0$ il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

Risoluzione

1. Per il teorema di Bolzano-Darboux (o dei valori intermedi) **19** una funzione f continua in un intervallo chiuso $[a;b]$, con $f(a) \neq f(b)$, assume almeno una volta all'interno di tale intervallo un qualsiasi valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$.

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 94

La funzione $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x$ è continua in $\mathbb{R}$ e in particolare nell'intervallo $[a; b]$, nel quale assume tutti i valori compresi tra $f(a) = \operatorname{sen}(\pi)\cos\left(\frac{a\pi}{2b}\right) + a = a$ e $f(b) = \operatorname{sen}\left(\frac{b\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + b = b$.

Esisterà quindi $c \in]a; b[$ tale che $f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{a+b}{2}$, dimostrando l'asserto.

2. Posto $a = 2b = 2$, la funzione g che si ricava ha equazione

$g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x$

o anche

$g(x) = \frac{1}{2}\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] + x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi x) + x.$

Come già evidenziato per $f(x)$, la funzione $g(x)$ è definita su tutto l'asse reale $\mathbb{R}$ ed è dispari, cioè simmetrica rispetto all'origine O, essendo:

$g(-x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(-\pi x) - x = -\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi x) + x\right] = -g(x)$ (condizione **9**).

Possiamo limitare lo studio della funzione all'intervallo $[0; +\infty)$ ed estendere il suo grafico a tutto $\mathbb{R}$ per simmetria.

Il comportamento agli estremi del campo di esistenza è:

$g(0) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi x) + x\right] = +\infty,$

per cui la funzione passa per l'origine O degli assi, è sempre positiva per $x > 0$, non ammette né asintoti verticali né orizzontali; avendo una componente periodica, non ammette neppure asintoti obliqui ma ha un andamento «oscillante», prossimo alla retta $y = x$.

Derivando avremo $g'(x) = \frac{\pi}{2}\cos(\pi x) + 1$.

La derivata prima si annulla per

$\cos(\pi x) = -\frac{2}{\pi} \Rightarrow x = \alpha = \frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right),$

ed è non negativa se

$\cos(\pi x) \geq -\frac{2}{\pi} \Rightarrow 2k \leq x \leq \alpha + 2k,$

con $k \in \mathbb{Z}$, come si ottiene immediatamente rappresentando le funzioni $y = \cos(\pi x)$, periodica di periodo $T = 2$, e $y = -\frac{2}{\pi}$ (**figura 1**, $k = 0$).

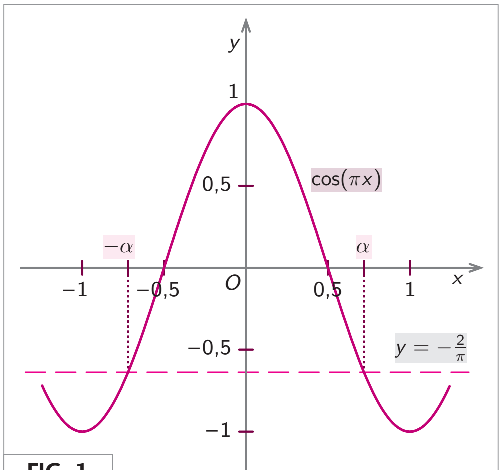
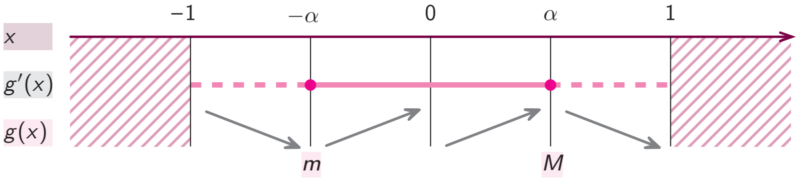


FIG. 1

I punti $x = \frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 2k$ risultano essere punti di massimo relativo (per simmetria, $x = -\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 2k$ punti di minimo relativo); infatti:



Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 95

Derivando ancora otteniamo $g''(x) = -\frac{\pi^2}{2}\,\mathrm{sen}(\pi x)$.

La derivata seconda si annulla per

$\mathrm{sen}(\pi x) = 0 \;\Rightarrow\; \pi x = \pi + k\pi \;\Rightarrow\; x = 1 + k$,

ed è non negativa se

$\mathrm{sen}(\pi x) \leq 0 \;\Rightarrow\; 1 + 2k \leq x \leq 2 + 2k$,

con $k \in \mathbb{Z}$.

In tali intervalli g volge quindi la concavità verso l'alto.

I punti di ascissa $x = 1 + k$ risultano essere punti di flesso.

Il grafico della funzione $g(x)$ è rappresentato in **figura 2**.

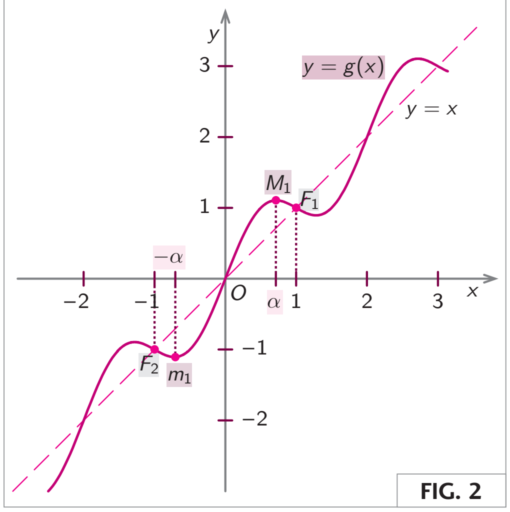


FIG. 2

3. Il primo punto di massimo relativo che si trova per $x > 0$ è quello indicato in **figura 2** con M_1 e ha ascissa $\alpha = \frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right)$, zero dell'equazione $g'(x) = \frac{\pi}{2}\cos(\pi x) + 1$; perciò $g'(\alpha) = \frac{\pi}{2}\cos(\pi\alpha) + 1 = 0$.

Considerato che $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 1 = 1 > 0$ e $g'(1) = \frac{\pi}{2}\cos\pi + 1 = -\frac{\pi}{2} - 1 < 0$, possiamo concludere che $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$.

Applicando il metodo delle tangenti, $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$, a $h(x) = g'(x)$, sapendo che

$h'(x) = g''(x) = -\frac{\pi^2}{2}\,\mathrm{sen}(\pi x), \quad h''(x) = -\frac{\pi^3}{2}\cos(\pi x), \quad x_0 = \frac{1}{2}$

(il metodo richiederebbe che $h''\left(\frac{1}{2}\right)\cdot h\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ mentre in questo caso $h''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, ma $h''\left(\frac{1}{2}^{+}\right) > 0$ per cui può essere accettato $x_0 = \frac{1}{2}$), si ha, con un'approssimazione di 10^{-3}:

n	x_n	$h(x_n)$	$h'(x_n)$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$
0	0,5	1	−4,93480	======
1	0,70264	0,06620	−3,96814	0,20264
2	0,71932	0,00132	−3,80904	0,01668
3	0,71967	$-7{,}9548 \cdot 10^{-6}$		0,00035

Essendo il valore assoluto della differenza tra due approssimazioni successive x_n di α e il valore $|h(x_n)|$ minori del 10^{-3} scelto, si ricava quindi che $\alpha \approx 0{,}71967$ (un valore più preciso è $\alpha \approx 0{,}7196679097$).

Quesito 11

QUESITO 5
a.s. 2003/2004
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
Liceo Scientifico
P.N.I.

Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che:

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 3$ e $g(2) = 4$.

Trovate una espressione di $g(x)$.

Qui di seguito, il testo del quesito n° 5, Esame di Stato, sessione ordinaria 2004, Scientifico P.N.I., avente lo stesso oggetto: «Dare un esempio di funzione g, non costante, tale che $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 3$ e $g(2) = 4$».

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 96

Risoluzione

Le condizioni espresse dal testo sono soddisfatte da una funzione $g(x)$ che presenta nel punto $x = 2$ una discontinuità di 3ª specie o eliminabile **17** avendo uguali i limiti destro e sinistro per $x = 2$ e la funzione assume in tale punto valore diverso dai precedenti limiti.

La scelta più semplice tra le molteplici possibilità è quella di una funzione polinomiale il cui valore sia 3 per $x = 2$ escludendo però dal dominio il suddetto valore di x.

La seguente funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \neq 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

è definita a tratti su tutto $\mathbb{R}$, non è costante e soddisfa le condizioni richieste; infatti:

$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \left(x^2 - 1\right) = 3$ e $g(2) = 4$.

$g(x)$ è quindi continua $\forall x \neq 2$ e $x = 2$ è una discontinuità di 3ª specie.

Problema 4

PROBLEMA 2
A.S. 2004/2005
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0; +\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}\, x^2(3 - 2\log x) + 1 \quad \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e sia $\mathcal{C}$ la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è continua e derivabile in O.

2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0; +\infty[$, un'unica radice reale.

3. Si disegni $\mathcal{C}$ e si determini l'equazione della retta r tangente a $\mathcal{C}$ nel punto di ascissa $x = 1$.

4. Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva $\mathcal{C}$, dalla retta tangente r e dalle due rette $x = \frac{1}{n}$ e $x = 1$.

5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

Risoluzione

1. Come indicato nella **11**, una funzione è continua in un punto x_0 se

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Poiché la funzione è definita per $x \geq 0$ e cambia espressione per $x = 0$, bisogna verificare la continuità a destra dello 0, essendo sicuramente continua per $x > 0$ perché formata da funzioni elementari continue. Si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[\tfrac{1}{2}\, x^2(3 - 2\log x) + 1\right] = \lim_{x \to 0^+} \left[\tfrac{3}{2}\, x^2 - x^2 \log x + 1\right] =$$
$$= 0 - 0 + 1 = 1 = f(0),$$

essendo, per il teorema di L'Hôpital,

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x^2 \log x\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0\,.$$

La funzione è quindi, per la **12**, continua a destra in 0.

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 97

Dalla definizione di derivata prima in un punto si ha:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\left[\frac{1}{2} h^2(3 - 2\log h) + 1\right] - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \left[\tfrac{1}{2} h(3 - 2\log h)\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \left[\tfrac{3}{2} h - h\log h\right] = 0, \quad \text{essendo sempre } \lim_{h \to 0^+} (h \log h) = 0.$$

La funzione è quindi derivabile a destra in 0 e la sua derivata vale $f'_+(0) = 0$.

2. Per dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0; +\infty[$, un'unica radice reale, si possono studiare le caratteristiche della funzione:

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\tfrac{1}{2} x^2(3 - 2\log x) + 1\right] = +\infty \cdot (-\infty) + 1 = -\infty$$

per cui f assume valori discordi agli estremi del dominio $\mathcal{D} = [0; +\infty[$.

È possibile determinare un valore finito di x in cui f risulta negativa, ad esempio $f(6) = 55 - 36\log 6 \approx -9{,}503$; perciò, avendo precedentemente verificato che la funzione è continua in tutto il dominio, per il teorema di esistenza degli zeri **20**, essa assumerà almeno una volta all'interno dell'intervallo $[0; 6]$ il valore nullo, cioè $\exists \alpha \in \,]0; 6[$ tale che $f(\alpha) = 0$.

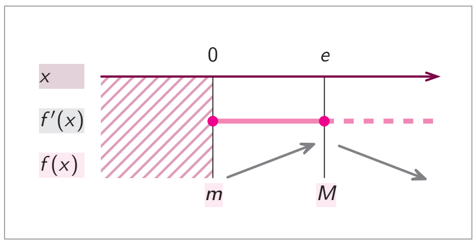
Dimostrata l'esistenza della radice di f, bisogna ora dimostrarne l'unicità.

Derivando: $f'(x) = x(3 - 2\log x) + \frac{1}{2} x^2 \left(-\frac{2}{x}\right) = 2x(1 - \log x) \;\Rightarrow$

$$\begin{cases} f'_+(0) = 0 \\ f'(x) = 2x(1 - \log x) \quad \text{se } x > 0 \end{cases}$$

La derivata prima si annulla per
$x = 0 \vee \log x = 1 \;\Rightarrow\; x = 0 \vee x = e$
ed è non negativa per $0 \le x \le e$.

$x = 0$ è un punto di minimo relativo, $m(0; 1)$;
$x = e$ è un punto di massimo assoluto, $M\left(e; \frac{1}{2} e^2 + 1\right)$;

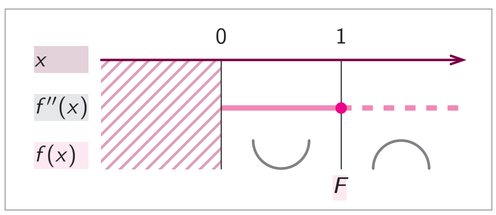


f è strettamente crescente in $(0; e)$ e assume valori sempre positivi in tale intervallo; f è strettamente decrescente in $(e; +\infty)$ e si annulla in quest'ultimo intervallo in un solo punto, data la monotonia della funzione e il teorema di esistenza degli zeri applicato a $[e; 6]$, dimostrando l'unicità di α.

3. Per completare lo studio di $f(x)$ e rappresentarne il grafico $\mathcal{C}$, occorre calcolare la derivata seconda:

$$f''(x) = 2(1 - \log x) + 2x\left(-\tfrac{1}{x}\right) = -2\log x$$

che si annulla per $x = 1$ ed è non negativa per $f''(x) = -2\log x \ge 0 \Rightarrow 0 < x \le 1$;
$f(x)$ presenta perciò concavità verso l'alto in $(0; 1)$, concavità verso il basso in $(1; +\infty)$ e un flesso nel punto $F\left(1; \frac{5}{2}\right)$.



Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 98

Essendo $f'(1) = 2$, l'equazione della retta r tangente in F al grafico $\mathcal{C}$ è

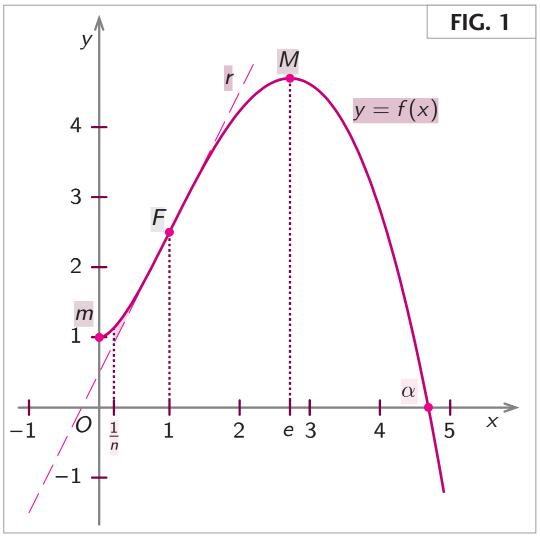
$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow$

$y - \frac{5}{2} = 2(x-1) \Rightarrow r\colon\ y = 2x + \frac{1}{2}$

e risulta essere anche la tangente inflessionale.

La curva $\mathcal{C}$ grafico di $f(x)$ è rappresentata in **figura 1**.

FIG. 1



4. Detto n un numero naturale non nullo, per cui $n > 0$ e $\frac{1}{n} < 1$, l'area $\mathcal{A}_n$ richiesta, evidenziata nella **figura 1**, è data da:

$$\mathcal{A}_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} (f - r)\, \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\left(\frac{3}{2}x^2 \log x + 1\right) - \left(2x + \frac{1}{2}\right)\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x - x^2 \log x + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(x^2 \log x\right) \mathrm{d}x.$$

Integrando per parti $\int (x^2 \log x)\, \mathrm{d}x$, con fattore finito $\log x$ e fattore differenziale $x^2\, \mathrm{d}x$, si ottiene:

$$\int \left(x^2 \log x\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{3} \int x^2\, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + c,$$

per cui

$$\mathcal{A}_n = \left[\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3}\log x + \frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \left[\frac{11}{18}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3}\log x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} =$$

$$= \frac{11}{18} - 1 + \frac{1}{2} - \left(\frac{11}{18n^3} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2}\log\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{9} - \frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{\log n}{3n^3}.$$

5. Per il calcolo del limite di $\mathcal{A}_n$ per $n \to +\infty$ avremo:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{9} - \frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{\log n}{3n^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{9} - \lim_{n\to+\infty} \frac{11}{18n^3} + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} - \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{3n^3}.$$

Essendo $\lim_{n\to+\infty} \frac{11}{18n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$, rimane da calcolare solo $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{3n^3}$.

Tale limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$. Per poter applicare il teorema di L'Hôpital occorre passare dal discreto al continuo ($n \in \mathbb{R}$) e quindi passare dalla successione alla funzione definita da $\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}$. Si ricava:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{3n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{9n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{9n^3} = 0.$$

Facciotto2008-03 10/12/08 14:04 Pagina 99

In conclusione, $\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{1}{9} - 0 + 0 - 0 - 0 = \frac{1}{9}$.

L'interpretazione del risultato è immediata considerato che per $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$, per cui la retta $x = \frac{1}{n} \to x = 0$, si avvicina cioè all'asse y, cosicché il limite trovato rappresenta l'area della regione finita di piano compresa tra la curva $\mathcal{C}$, la retta tangente r e l'asse y.

Quesito 12

QUESITO 5
A.S. 2004/2005
Esame di Stato , s.o.
Liceo Scientifico
Liceo Scientifico P.N.I.

Il numero e di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di e^x è e^x?

Qui di seguito, il testo del quesito n° 5, Esame di Stato sessione ordinaria 2005, Liceo Scientifico P.N.I. avente lo stesso oggetto: «Come si definisce e qual è l'importanza del numero e di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]? Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.»

Risoluzione

Il numero e di Nepero è definito come il limite della successione $e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *

oppure, per la 26, come limite della funzione di variabile reale $e = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

In base alla definizione di derivata, $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, si ha:

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(e^h-1\right)}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}.$$

Ricordato il limite notevole 28, $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$, si ricava: $(e^x)' = e^x \cdot 1 = e^x$, cioè la proprietà richiesta.

Per quanto concerne l'importanza di e, si possono citare alcune situazioni, soprattutto di natura fisica o biologica, in cui occorre utilizzare la funzione esponenziale di base e per descrivere un fenomeno, ad esempio le leggi del decadimento di sostanze radioattive, la quantità di carica sulle piastre di un condensatore in un circuito a corrente continua, le leggi di crescita o di decadimento di organismi viventi.

La più semplice procedura per calcolare e è basata sulla sua definizione; si possono assegnare valori sempre maggiori di n per ottenere approssimazioni per difetto di e dato che la definizione * rappresenta il limite di una successione a termini positivi crescente (la convergenza a e risulta però molto lenta:

con $n = 1000 \Rightarrow e \approx 2{,}7169238$;
$n = 10\,000 \Rightarrow e \approx 2{,}7181459$;
$n = 100\,000 \Rightarrow e \approx 2{,}7182546$ dove $e = 2{,}718281828459045235\ldots$).

Quesito 13

QUESITO 4
A.S. 2004/2005
Esame di Stato, s.s.
Liceo Scientifico

Si consideri la seguente equazione in x:
$(k-2)\,x^2 - (2k-1)\,x + (k+1) = 0$,
dove k è un parametro reale diverso da 2. Indicate con x' e x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

Risoluzione

Essendo $k \neq 2$, l'equazione data è di 2° grado e ammette due soluzioni reali se il suo discriminante è $\Delta \geq 0$:

$\Delta = (2k-1)^2 - 4(k-2)(k+1) \geq 0 \;\Rightarrow\; 4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 4k + 8 \geq 0 \;\Rightarrow\; 9 \geq 0$

e tale condizione è sempre verificata, $\forall k \in \mathbb{R}$.

Ricordato che per una generica equazione di 2° grado, $ax^2 + bx + c = 0$, la somma delle radici è $x' + x'' = -\frac{b}{a}$, si ha:

$x' + x'' = \dfrac{2k-1}{k-2},\ k \neq 2.$

I limiti richiesti valgono quindi:

$$\lim_{k\to 2^-} \frac{2k-1}{k-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty \;\wedge\; \lim_{k\to 2^+} \frac{2k-1}{k-2} = +\infty \;\Rightarrow\; \lim_{k\to 2} \frac{2k-1}{k-2} \text{ non esiste,}$$

$$\lim_{k\to -\infty} \frac{2k-1}{k-2} = 2,\ \lim_{k\to +\infty} \frac{2k-1}{k-2} = 2.$$

Quesito 14

QUESITO 5
A.S. 2004/2005
Esame di Stato, s.s.
Liceo Scientifico

Il limite della funzione $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ per $x \to 0$:

a. è uguale a 1; **b.** è uguale a $+\infty$; **c.** non esiste;

d. è uguale a e; **e.** è uguale a $\frac{1}{e}$,

con e la base dei logaritmi naturali. Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

Risoluzione guidata

Calcoliamo il limite $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$ che si presenta nella forma indeterminata 1^{∞} . Posto $y = -\frac{1}{x}$, cioè $x = -\frac{1}{y}$ e se $x \to 0^{\pm}$, allora $y \to \mp\infty$; sostituendo nel limite dato si ottiene:

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to \mp\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{-y} = \left[\lim_{y\to \mp\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e};$$

ricordato il limite notevole **26**, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

La risposta corretta è quindi la **e**

Quesito 15

QUESITO 8
A.S. 2004/2005
Esame di Stato, s.s.
Liceo Scientifico

È vero o falso che le due funzioni $\ln\left(x^2-4\right)$ e $\ln(x+2) + \ln(x-2)$ hanno lo stesso grafico? Fornirne una esauriente spiegazione della risposta.

Risoluzione guidata

Calcoliamo i domini $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ delle funzioni in esame.

La funzione $\ln\left(x^2-4\right)$ è definita per $x^2 - 4 > 0$ $\Rightarrow \mathcal{D}_1 : x < -2 \vee x > 2$

La funzione $\ln(x+2) + \ln(x-2)$ è definita per

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{D}_2 : x > 2$$

Avendo le due funzioni dominio differente , $\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}_2$, non possono avere lo stesso grafico.

Se consideriamo il dominio comune $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \left]2; +\infty\right[$, allora in esso è valida l'uguaglianza $\ln\left(x^2-4\right) = \ln(x+2) + \ln(x-2)$ e le due funzioni coincidono , così come i loro grafici.